Управление диффеоморфизмами и плотностями
Control of diffeomorphisms and densities

Аграчёв А.А.
SISSA, Триест, Италия
Математический институт им. В. А. Стеклова, РАН, Москва, Россия
e-mail: `agrachev@sissa.it`

Рассмотрим классическую управляемую систему по Понтрягину:

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x \in M, \ u \in U, \tag{1}$$

где пространство состояний M – гладкое многообразие, множество управляющих параметров U – замкнутое подмножество, вообще говоря, другого гладкого многообразия, правая часть f – гладкая, и выполняется подходящее условие полноты, обеспечивающее продолжимость допустимых траекторий на всю временную ось.

Назовём управлениями измеримые ограниченные по t и гладкие по x отображения $\mathbf{u}\colon (t, x) \mapsto \mathbf{u}(t, x)$ со значениями в U: своеобразная смесь программных управлений и управлений обратной связи. Подстановка управления в систему (1) приводит к неавтономному обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\dot{x} = f(x, \mathbf{u}(t, x)), \tag{2}$$

которая порождает семейство диффеоморфизмов $P_t : M \to M$, где $P_0(x) = x$, а кривые $t \mapsto P_t(x)$ удовлетворяют уравнению (2) для любого $x \in M$. Мы говорим, что $t \mapsto P_t$ – допустимая "траектория" в группе диффеоморфизмов, отвечающая управлению $\mathbf{u}$.

Интегральному функционалу

$$J(u(\cdot)) = \int_0^T \varphi(x(t), u(t))\, dt$$

и вероятностной мере μ на M, сопоставляется функционал

$$\mathbf{J}_\mu(\mathbf{u}) = \int_0^T \int_M \varphi(P_t(x), \mathbf{u}(t, x))\, d\mu dt$$

на пространстве управлений $\mathbf{u}$.

В докладе предполагается обсудить вопросы управляемости и оптимального управления для определённых таким образом систем на группе диффеоморфизмов.