Принцип бездействия в биомеханике
An Inactivation Principle in Biomechanics

Готье Ж. П.
Université de Toulon, France
e-mail: `gauthier@u-bourgogne.fr`

Бере Б.
Université de Bourgogne, France
e-mail: `bastien.berret@u-bourgogne.fr`

Вопрос о том, какой принцип управления применяет подсознание человека при движении, весьма нетривиален. Результаты эксперимента, когда человек, указывая неподвижной вытянутой рукой в одном направлении, быстро поворачивал руку, и останавливал ее в другом направлении, оказались удивительными: спустя примерно половину всего времени движения T наблюдались промежутки, когда основные группы мышц, участвующие в движении (одна — вызывающая ускорение, и другая — тормозящая) одновременно выключались. Другая (менее существенная) особенность состояла в несимметричности профиля скоростей. Например, когда руку поднимают вверх, максимальная скорость достигается в промежутке от $0.44T$ до $0.49T$. В докладе будет рассказано об общей теории, объясняющей эти эффекты, и основанной на теории Трансверсальности и Принципе Максимума Понтрягина (включая негладкую версию принципа максимума, принадлежащую Кларку).

Рассмотрим механическую систему с Лагранжианом

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}\,\dot{x}^T M(x)\dot{x} - V(x)$$

и обобщенными координатами $x \in \mathbf{R^n}$. Обобщенные силы в уравнениях Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = u + N(x, \dot{x})$$

представляют собой сумму вектора $u \in \mathbf{R^n}$ управления и некоторой другой силы $N(x, \dot{x})$ (учитывающей, например, трение).

Итак, мы рассматриваем динамику управляемой системы

$$\ddot{x} = \varphi(x, \dot{x}, u),$$

в которой

$$\varphi(x, \dot{x}, u) = M^{-1}(x)(N(x, \dot{x}) - \nabla V(x) - C(x, \dot{x})\dot{x} + u),$$

и матрица Кориолиса $C(x, \dot{x}) \in M_n(\mathbf{R})$ задана формулой

$$C_{ij}(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial M_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial M_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial M_{kj}}{\partial x_i} \right) \dot{x}_k.$$

Обычная (алгебраическая) работа внешней управляющей силы (или момента) u на перемещении $x(t)$, $t \in [0, T]$ — это величина

$$W = \int\limits_0^T u\dot{x}\, dt.$$

"Практической" работой внешней силы (то есть энергией, затраченной мышцей на эту внешнюю силу) будем называть величину

$$W = \int\limits_0^T |u\dot{x}|\, dt,$$

и "абсолютной" работой Aw будем называть сумму выражений такого вида для всех мышц.

Отметим, что в описанном эксперименте управления задаются как $u_i = v_i - w_i$ при неотрицательных управляющих силах u_i, w_i каждой из антагонистических групп мышц, поэтому положим

$$Aw = \sum_{i=1}^{n} \left(\int\limits_0^T |v_i \dot{x}|\, dt + \int\limits_0^T |w_i \dot{x}|\, dt \right).$$

Наша теория содержит два основных результата:

1. Используя соображения трансверсальности, мы показываем, что для существования интервалов "бездействия" целевой функционал (если конечно он существует) не может быть гладким при $u = 0$. Другими словами, наличие "бездействия" означает, что целевой функционал содержит члены, подобные абсолютной работе.

2. Используя Принцип Максимума для функционала, являющегося комбинацией абсолютной работы и некоторого другого члена (комфортности), мы доказываем, что промежутки бездействия, и даже одновременного бездействия всех групп мышц обязаны появляться при оптимальном движении.

Отметим, что наш подход объясняет и ряд других классических явлений в биомеханике.