
**Теорема Томсона о неустойчивости:
её топологический смысл и обобщения
The Thomson theorem on instability:
its topological meaning and generalizations**

Козлов В.В.

*Математический институт им. В. А. Стеклова, РАН,
Москва, Россия*

e-mail: vvkozlov@mi.ras.ru

Классическая теорема Томсона утверждает, что если индекс инерции полной энергии в состоянии изолированного равновесия нечётен, то это равновесие неустойчиво. Эта теорема устанавливает препятствия к гироскопической стабилизации неустойчивых равновесий, поскольку при добавлении гироскопических сил энергия остается неизменной. Кстати сказать, в теории гироскопической стабилизации существенную роль играет пространство Понтрягина – гильбертово пространство с индефинитной метрикой. В докладе будет рассказано о новых результатах в задаче о гироскопической стабилизации, основанных, в частности, на поиске вихревых (нелагранжевых) инвариантных многообразий уравнений Гамильтона.

Теорему Томсона можно сформулировать для систем дифференциальных уравнений общего вида, допускающих невозрастающие функции с морсовскими критическими точками. Более того, в ряде случаев можно отказаться от условия изолированности положений равновесия. Найдено топологическое доказательство этого утверждения, основанное на теореме Пуанкаре о сумме индексов особых точек векторного поля.

Обсуждается более сложная задача о препятствиях к гироскопической стабилизации, когда положения равновесия становятся вырожденными критическими точками потенциальной энергии. Общие теоремы о неустойчивости базируются на поиске асимптотических к положению равновесия решений в виде рядов по обратным степеням времени, коэффициенты которых – полиномы от логарифмов времени. С другой стороны, возможность построения таких решений тесно связана с топологией вещественных алгебраических многообразий (точнее, с оценкой их эйлеровой характеристики). Результаты общего характера позволяют, в частности, распространить теорему Томсона на вырожденные положения равновесия, которые неустранимым образом появляются в типичных семействах механических систем, зависящих не более, чем от пяти параметров.